Leçon 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Développements :

L'exponentielle induit un homéomorphisme entre $S_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})^{++}$, Décomposition de Dunford.

Bibliographie :

Mansuy-Mneimné, OA, Rombaldi, Gourdon, Escofier.

Rapport du jury :

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps K et la topologie choisie pour Mn pKq. Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat une fois que l'on connaît les valeurs propres et ceci sans diagonaliser la matrice, par exemple à l'aide des projecteurs spectraux. Sur les corps finis, on a des critères spécifiques de diagonalisabilité. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation. S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de Fourier rapide.

1 Diagonalisabilité

Définition 1 (Mansuy p45). *[Romb p634] Valeur propre, vecteur propre, spectre, sous-espace propre.*

Exemple 2. *Un projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur un plan a exactement deux espaces propres : le plan E_1 et la droite normale à ce plan E_0.*

(2) Une rotation d'angle $\neq k\pi$ dans $\mathbb{R}^2$ n'a pas de valeur propre réelle. En revanche, elle a deux valeurs propres complexes. Le problème de la diagonalisation dépend du corps de base.

(3) Une homothétie de rapport k a pour seul espace propre $E_k = K^n$.

Proposition 3. *Les espaces propres sont les plus grands s-ev sur lesquels $f \in End(E)$ est une homothétie.*

Définition 4 (Mansuy p79). *Un endomorphisme est diagonalisable s'il existe une base de vecteurs propres pour cet endomorphisme.*

Remarque 5. *Dans cette base, la matrice de u est diagonale.*

Définition 6 (Mansuy p79). *Matrice diagonalisable.*

Proposition 7 (Mansuy p79). *Une matrice est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé l'est.*

Définition 8 (OA p163). *Polynôme caractéristique d'une matrice. (En parler ici ?)*

Exemple 9 (Romb p635). *Matrice 2×2, matrice de rotation, matrice de symétrie.*

Proposition 10 (Romb p637). *Les racines du polynome caractéristique sont les valeurs propres de u.*

Exemple 11. *En reprenant les exemples précédents, on a $\chi_1(X) = X(X-1)^2$, $\chi_2(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - exp(i\theta))(X - exp(-i\theta))$ et $\chi_3(X) = (X-k)^n$.*

Exemple 12 (Escofier p298).

2 Critères de diagonalisabilité

2.1 Critères géométriques

Proposition 13 (Romb p637). *Les sous-espaces propres sont en somme directe.*

Remarque 14 (Romb p638). *Si toutes les valeurs propres sont distinctes et si il y en a n, on est diagonalisable.*

Exemple 15. *En reprenant l'exemple précédent, la projection est diagonalisable, la rotation n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, l'homothétie est diagonale dans n'importe quelle base.*

Remarque 16 (Romb p673). *On s'intéresse ici au cas d'égalité.*

Proposition 17 (Romb p634). *Dimension du sous-espace propre $\leq$ à la multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.*

Théorème 18 (Mansuy p79...). *[Romb p676][OA p166] u est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des sous-espaces propres si et seulement si la somme des sous-espaces propres est égale à n.*

Exemple 19 (Romb p688). *Un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.*

Corollaire 20. *Si u admet n valeurs propres distinctes, alors il est diagonalisable.*

Exemple 21. *La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres $2, 4$ et 1 donc est diagonalisable.*

2.2 L'apport des polynômes d'endomorphismes

Théorème 22. *Théorème de Cayley-Hamilton. Le polynôme caractéristique est annulateur.*

Définition 23 (Romb p594)**.** *[OA p161] Le polynôme minimal de u est l'unique générateur de l'idéal des polynômes annulant u.*

Exemple 24. *Exemple avec une matrice simple.*

Proposition 25 (Romb p637)**.** *Les valeurs propres de u sont les racines du polynôme minimal.*

Théorème 26. *Lemme des noyaux.*

Application 27 (OA ?)**.** *Soit A une matrice telle que A^2 soit diagonalisable (par exemple une matrice antidiagonale), alors A est diagonalisable si et seulement si $Ker(A) = Ker(A^2)$.*

Théorème 28 (Mansuy p79...)**.** *[Romb p676][OA p166] u est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples si et seulement si χ_u est scindé et la multiplicité algébrique est égal à la multiplicité géométrique pour toute valeur propre.*

Application 29 (OA)**.** *Les restrictions d'endomorphismes diagonalisables sont diagonalisables.*

Application 30 (Mansuy p82)**.** *Diagonalisation d'une matrice définie par des blocs.*

Exemple 31 (Mansuy p81)**.** *[OA p166] Les symétries et les projections sont diagonalisables. (Caractéristique $\neq 2$.)) En particulier la transposition est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $L(K^n)$.*

Exemple 32. *Le seul endomorphisme nilpotent diagonalisable est l'endomorphisme nul.*

Application 33 (Romb)**.** *Si G est fini d'ordre N, pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont des racines N-èmes de l'unité.*

Application 34. *de l'ap. Caractères et sous-groupes distingués. Ou juste le lemme ?*

Application 35 (OA p166)**.** *Si K est un corps fini, u est diagonalisable si et seulement si $u^q - u = 0$.*

Application 36 (H2G2,Romb)**.** *Cardinal des matrices diagonalisables sur F_q.*

Proposition 37 (H2G2)**.** *Sur le corps $\mathbb{C}$, une matrice A est diagonalisable si et seulement si $\{P^{-1}AP | P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ est fermé.*

Proposition 38. *Théorème de Burnside.*

Proposition 39 (H2G2)**.** *Le polynôme caractéristique est un invariant de similitude pour les matrices diagonalisables. (Ici ?)*

Remarque 40. *Le polynôme minimal n'en est pas un.*

Remarque 41. *Toutes les matrices ne sont pas diagonalisables mais sur un corps algébriquement clos, on peut trigonaliser.*

3 Famille d'endomorphismes diagonalisables

3.1 Diagonalisation simultanée

Définition 42 (Mansuy p84)**.** *[Romb p676] Co-diagonalisabilité.*

Proposition 43 (Mansuy p84)**.** *[Romb p677] Une famille d'endomorphisme est codiagonalisable si et seulement si les endomorphismes commutent deux à deux et sont diagonalisables.*

Application 44. *Un sous-groupe abélien G de $GL_n(\mathbb{C})$ est codiagonalisable.*

Application 45 (OA)**.** *Un sous-groupe abélien G de matrices diagonalisables de $Gl_n(K)$ est semblable à un sous-groupe de matrices diagonales.*

Application 46 (OA p204)**.** *Les sous-groupes finis de GL_n sont conjugués à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales.*

Application 47 (OA)**.** *Soit K tel que $car(K) \neq 2$. Alors $Gl_n(K) \simeq Gl_m(K)$ si et seulement si $m = n$.*

Application 48 (Romb p690)**.** *Si $A, B \in M_n(K)$ sont diagonalisables, alors $M \mapsto AM + MB$ est diagonalisable.*

Application 49 (Serre p39)**.** *Les représentations irréductibles d'un groupe abélien sont de degré 1*

Remarque 50. *Toutes les représentations irréductibles sont de degré 1 (on est codiagonalisable) si et seulement si le groupe est abélien.*

3.2 Endomorphismes symétriques et hermitiens

On se place dans un espace euclidien.

Remarque 51. *Plutôt un espace hermitien pour avoir vraiment de la diagonalisabilité ? Et non par blocs ? cf Romb analyse matricielle et scornet. Gourdon p244.*

Définition 52 (Romb p702)**.** *Adjoint d'un endomorphisme.*

Définition 53 (Gourdon p258)**.** *[Romb p728] Endomorphisme normal.*

Exemple 54 (Romb p729)**.** *Endomorphismes symétriques, antisymétriques, orthogonaux.*

Théorème 55 (Gourdon p260)**.** *[Romb p732] Réduction des endomorphismes normaux.*

Application 56 (Romb p732)**.** *Réduction des matrices symétriques, antisymétriques et orthogonales.*

Application 57. *Existence et unicité de la racine carrée d'une matrice symétrique définie positive. Décomposition polaire*

Application 58. *Les matrices antisymétriques réelles, orthogonales sont diagonalisables sur C.*

Application 59 (FGN)**.** *$exp : A_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.*

4 Approximation par un endomorphisme diagonalisable

4.1 Décomposition de Dunford

Proposition 60 (Romb p603)**.** *Décomposition de Dunford.*

Exemple 61 (Romb p629)**.**

Remarque 62. *Il existe un algorithme effectif.*

Application 63. *u est diagonalisable si et seulement si $exp(u)$ l'est.*

Application 64. *Calcul d'exponentielle matricielle.*

Proposition 65 (Romb p750-751)**.** *On a* $\exp(A) = \exp(D)\exp(V)$ *et la décomposition de Dunford de* $\exp(A)$ *est donnée par* $\exp(A) = \exp(D = +\exp(D)(\exp(V) - I_n)$.

Proposition 66 (Romb p752)**.** *Expression de* $\exp(A)$ *en fonction des valeurs propres de A et de ses projecteurs spectraux.*

Exemple 67 (Gourdon p199)**.** *[Romb p629] Un exemple de calcul.*

Application 68 (Romb p752)**.** *Si χ_A est scindé, A est diagonalisable si et seulement si* $\exp(A)$ *l'est.*

Application 69 (OA p215)**.** *[Romb p766]* $\exp(A) = I_n$ *si et seulement si A est diagonalisable et $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.*

Application 70 (Gourdon p200)**.** *$exp(tM) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$ si et seulement si $Sp(M) \subset R_-^*$.*

4.2 Densité des matrices diagonalisables et topologie

Proposition 71 (OA p179)**.** *Résultats de densité sur les matrices diagonalisables $T_n(K)$, $C_n(K)$, $D_n(K)$.*

L'ensemble des matrices diagonalisables et l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes sont denses dans l'ensemble des matrices trigonalisables.

Proposition 72 (OA)**.** *Intérieur des matrices diagonalisables.*

Application 73. *$D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Contre exemple 74 (Gourdon p186)**.**

Application 75 (OA p180)**.** *La non-continuité de l'application qui à une matrice associe sa partie diagonalisable dans Dunford.*

L'application qui à une matrice trigonalisable associe sa partie diagonalisable de la décomposition de Dunford n'est pas continue.

Application 76. *Pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, $det(\exp(M)) = \exp(Tr(M))$.*

Application 77. *Le cas $K = \mathbb{C}$ permet de redémontrer Cayley-Hamilton.*

Proposition 78 (FGN)**.** *Soit $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a les propriétés suivantes :*

i) La matrice A est nilpotente si et seulement si 0 appartient à l'adhérence de la classe de similitude de A. (Ne pas mettre.)

ii) La matrice A est diagonalisable si et seulement si la classe de similitude de A est fermée.

Proposition 79 (Romb)**.** *Pour tout $M \in S_n(\mathbb{R})$, on a : $||M||_2 = \rho(M) := maxSp(M)$.*

Application 80 (Romb)**.** *Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a $||M||_2 = \sqrt{\rho(MM^t)}$.*

Application 81. *L'exponentielle de matrice* $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*

5 Applications

Remarque 82 (Romb p614)**.**

Exemple avec la matrice 4*4 (cf Dunford).

5.1 Calculs de puissance, suites récurrentes linéaires

Proposition 83 (Grifone p168)**.** *[Escofier p311] Méthode : Pour A une matrice diagonalisable, avec $A = PDP^{-1}$ et D diagonale, on a $A^k = PD^kP^{-1}$ où $D^k = Diag(\lambda_1^k, .., \lambda_n^k)$.*

En connaissant P la matrice de passage de la base canonique de K^n vers une base de vecteurs propres de A, on peut ainsi calculer A^k plus facilement.

Remarque 84. *On peut aussi trouver un polynôme annulateur et effectuer des divisions euclidiennes.*

Exemple 85. *Dans le cas où $(u_n)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre k, ie définie par $u_0, .., u_{k-1}$ et telle que $u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + .. + a_0u_n$ pour tout $n \geq 0$, on peut réécrire la relation de récurrence linéaire sous la forme $U_{n+1} = (u_{n+k}, .., u_{n+1}) = M.U_n$ avec M de la forme...*

Le polynôme caractéristique de M est alors $P(X) = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - .. - a_0$ et est aussi son polynôme minimal, donc M est diagonalisable si et seulement si P est scindé à racines simples.

Dans un tel cas, pour $M = PDP^{-1}$, on a alors $U_n = M^nU_0 = PD^nP^{-1}U_0$, ce qui permet d'exprimer la valeur de u_n en fonction de n.

Exemple 86 (Escofier)**.**

5.2 Equations différentielles linéaires

Proposition 87 (Grifone p170)**.** *[Berthelin] Principe.*

Exemple 88 (Escofier)**.**